



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wytrzymałość materiałów

EiP - Wykład Nr 11

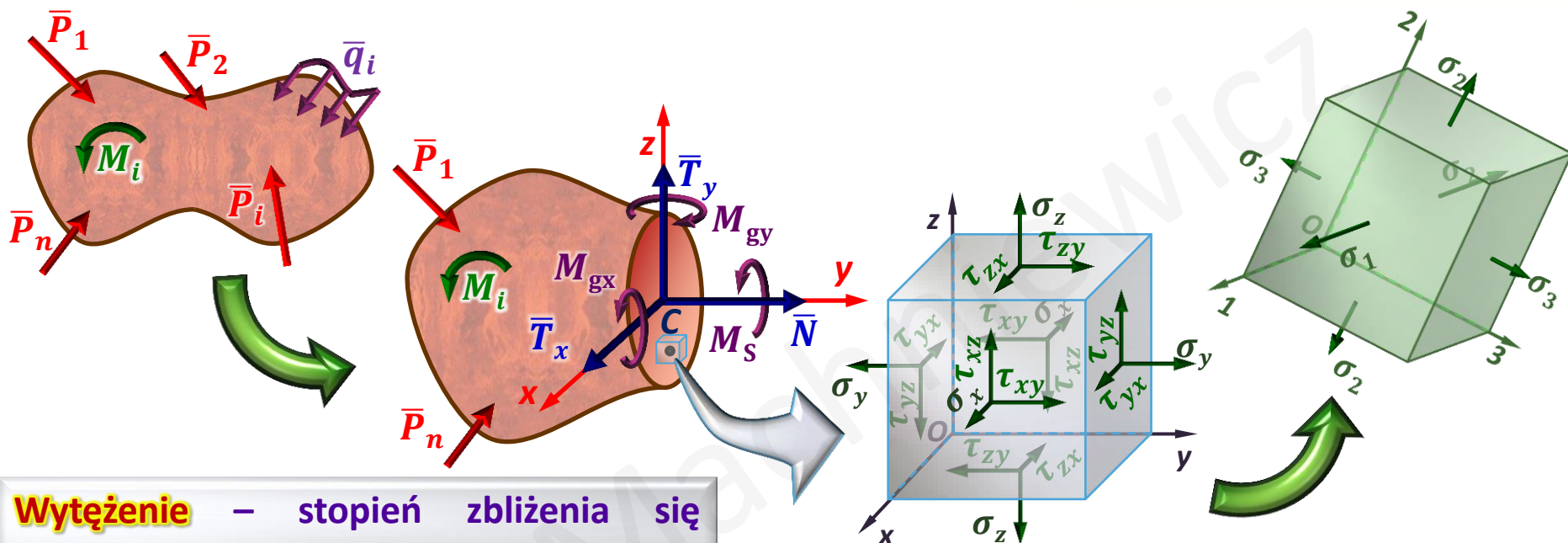
Złożony stan naprężeń - wyęcieżenie materiału

stan krytyczny materiału, pojęcie wyęcieżenia, cel stosowania hipotez wyęcieżeniowych, napręzenie zredukowane, przegląd hipotez wyęcieżeniowych: hipoteza Galileusza, hipoteza de Saint-Venanta, hipoteza Coulomba (C-T-G), hipoteza Hubera (H-M-H), zginanie ze skręcaniem przekrojów kołowych, moment zredukowany, warunek bezpieczeństwa, przykłady obliczeniowe.

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

Dr hab. inż. Tomasz Machniewicz

11.1. Pojęcie wyężenia



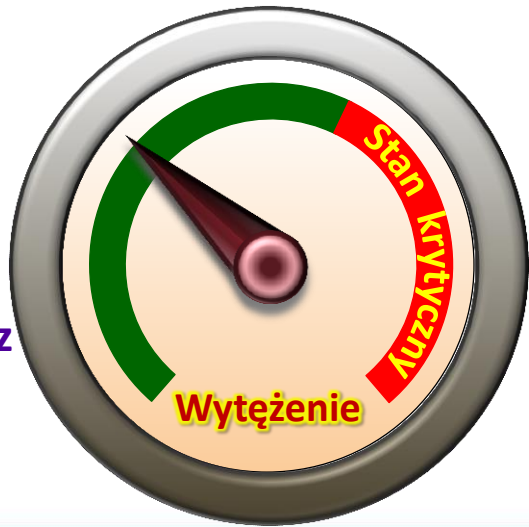
Wyężenie – stopień zbliżenia się materiału do **stanu krytycznego**.

Stan krytyczny – ogół zmian w stanie fizycznym ciała prowadzących do wystąpienia trwałych odkształceń (R_e - mat. elasto-plastyczne), lub utraty spójności (R_m, R_c - mat. kruche).

Wyężenie (W) jest funkcją stanu naprężenia materiału oraz jego odpowiednich o stałych materiałowych (**C**):

$$W = f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, C)$$

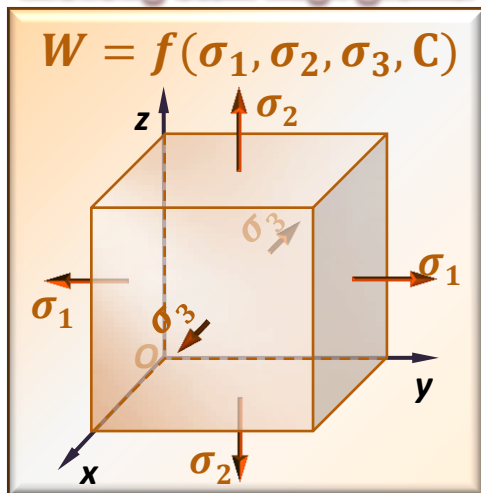
$$W = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C)$$



11.2. Naprężenie zredukowane

Aby określić stopień zbliżenia się materiału poddanemu złożonemu stanowi naprężenia do stanu krytycznego, wyężenie dla tego stanu porównuje się z wyężeniem dla przypadku jednoosiowego rozciągania tzw. **naprężeniem zredukowanym** σ_{zr} :

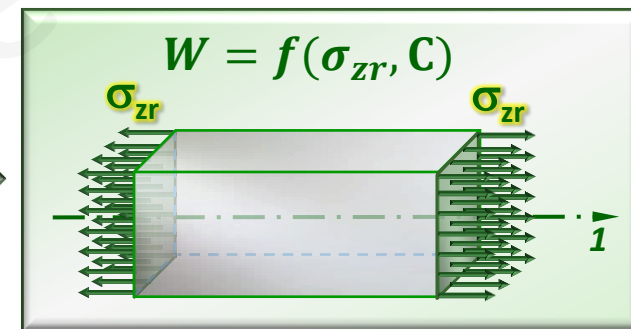
Złożony stan naprężenia



Hipoteza wyężeniowa

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C) = f(\sigma_{zr}, C)$$

Jednoosiowe rozciąganie:



$$\sigma_{zr} = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C)$$

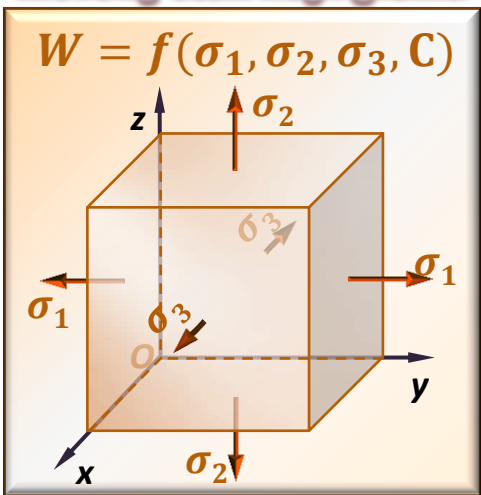
f, φ – funkcje zależne od przyjętej hipotezy wyężeniowej

Naprężenie zredukowane (σ_{zr}) – taka wartość naprężenia, wyznaczona dla danego złożonego stanu naprężenia przy użyciu przyjętej hipotezy wyężeniowej, która przy jednoosiowym rozciąganiu tego samego materiału, wywołałaby identyczne wyężenia jakie ma miejsce w rozpatrywanym stanie naprężenia.

Hipoteza wyężeniowa – założenie dotyczące tego, jaka wielkość fizyczna, związana ze stanem naprężenia i odkształcenia, decyduje o wyężeniu materiału.

11.2. Naprężenie zredukowane

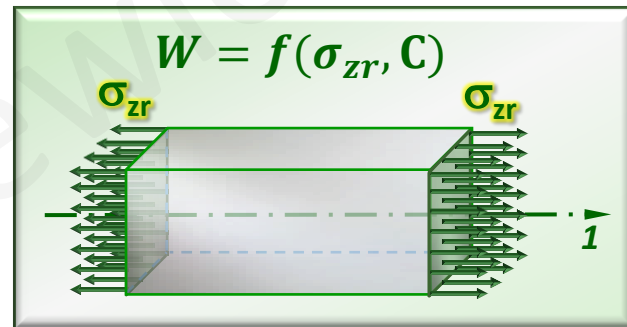
Złożony stan naprężenia



Hipoteza wyteżeniowa

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C) = f(\sigma_{zr}, C)$$

Jednoosiowe rozciąganie:

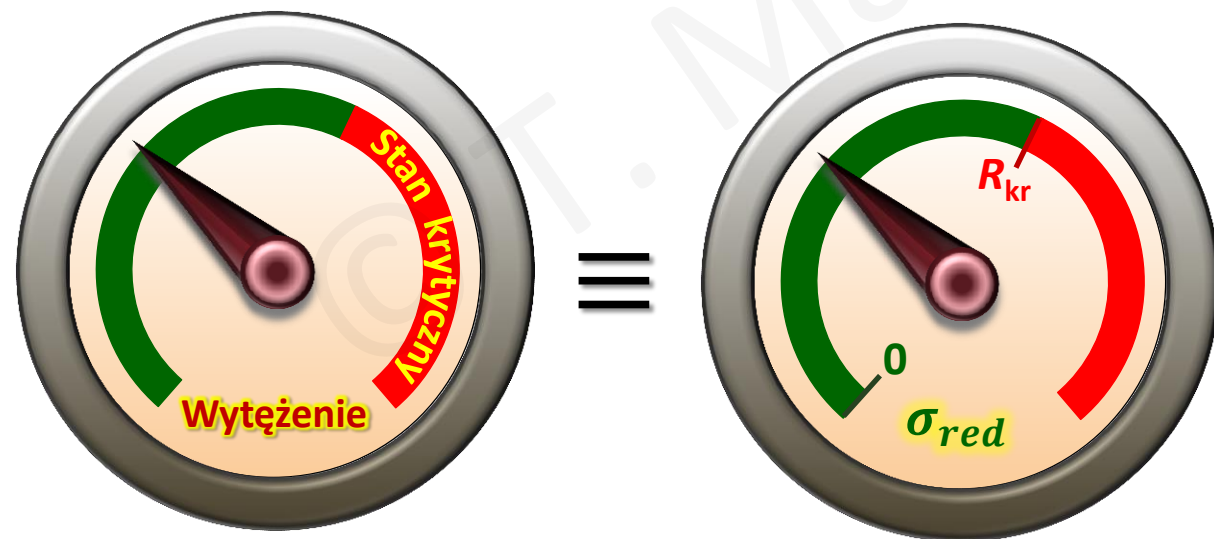


Warunek bezpieczeństwa:

$$\sigma_{zr} \leq k_r$$

k_r – dopuszczalne naprężenia rozciągające

R_{kr} – naprężenia krytyczne (R_e, R_m, R_c)



11.3. Przegląd hipotez wytrzymałościowych

11.3.1. Hipoteza Galileusza (1632)

Założenie: O wyężeniu decyduje wartość **maksymalnych naprężeń rozciągających** (σ_{max}).

Złożony stan naprężenia

$$W = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C)$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1$$



Jednoosiowe rozciąganie:

$$W = f(\sigma_{zr}, C)$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{zr}$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_1 \leq k_r$$

Cechy:

- ✓ nie uwzględniony wpływ naprężeń σ_2 i σ_3 na wyężenie materiału,
- ✓ nie uwzględniona możliwość zniszczenia pod wpływem osiowego ściskania.

Modyfikacja hipotezy Galileusza: **Clebsch (1862) i Rankin (1856)**

Założenie: O wyężeniu decyduje wartość **ekstremalnych naprężeń normalnych**: $\max(\sigma_1, -\sigma_3)$.

$$\sigma_{zr} = \max\left(\sigma_1, -\frac{\sigma_3}{z}\right) \leq k_r$$

gdzie $z = \frac{k_c}{k_r}$ - dopuszczalne naprężenia ściskające
 - dopuszczalne naprężenia rozciągające

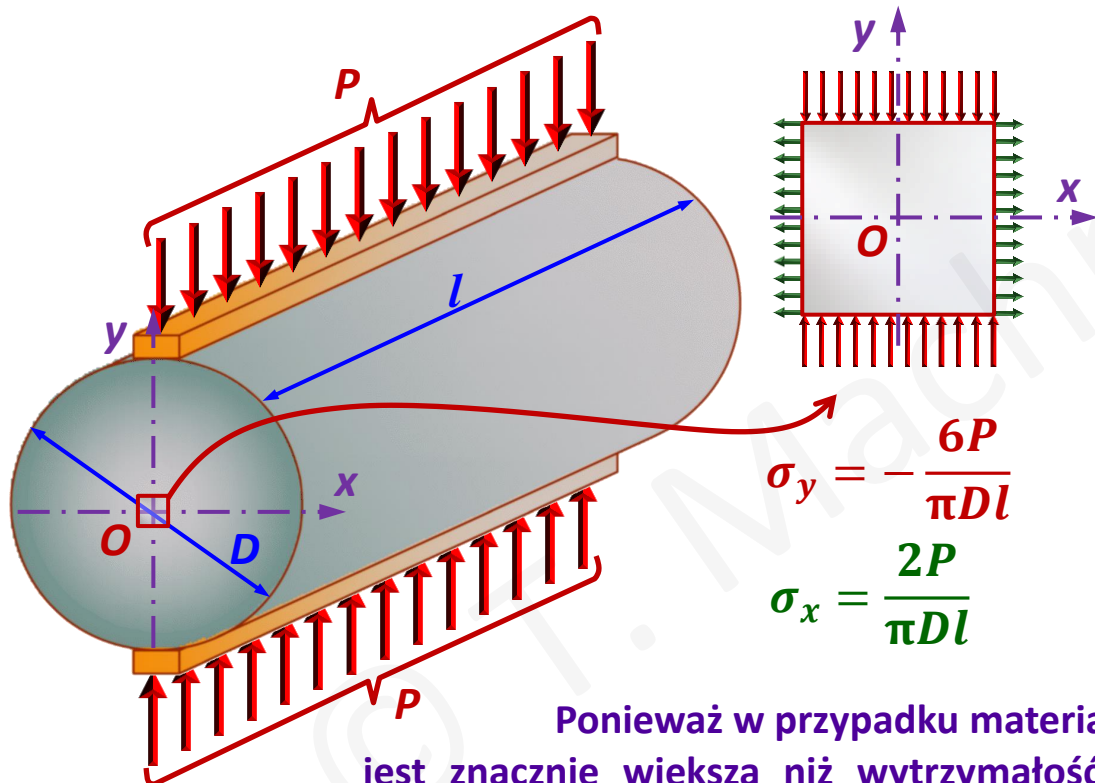
czyli, żadne z naprężeń normalnych nie może być większe od k_r ani mniejsze od k_c

Obecnie hipoteza Galileusza, nawet w postaci zmodyfikowanej jest stosowana rzadko i jedynie w zastosowaniu do materiałów kruchych.

11.3. Przegląd hipotez wytrzymałościowych

11.3.1. Hipoteza Galileusza (1632)

Hipoteza Galileusza stanowi m.in. teoretyczną podstawę pozwalającą na wyznaczanie wytrzymałości na rozciąganie w badaniu na rozłupywanie f_{cl}^{spl} materiałów kruchych (ang. *indirect tensile strength test*)



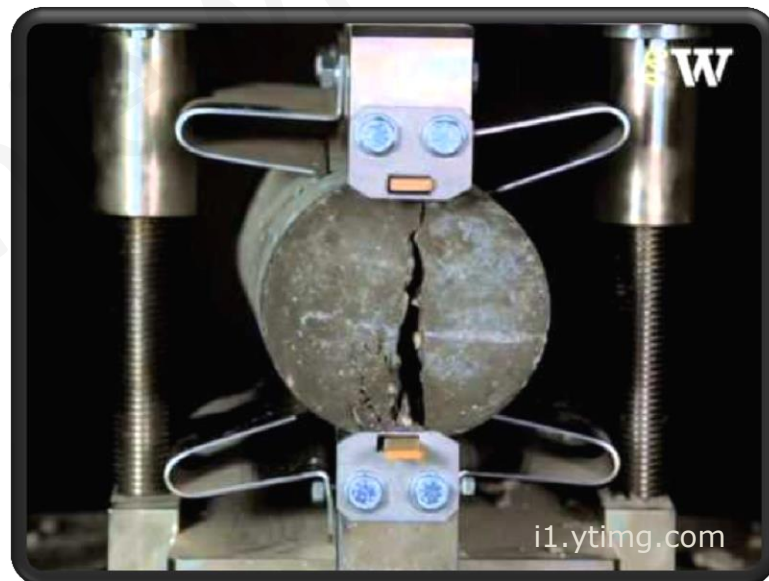
$$\sigma_y = -\frac{6P}{\pi D l}$$

$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi D l}$$

Ponieważ w przypadku materiałów kruchych wytrzymałość na ściskanie (R_c) jest znacznie większa niż wytrzymałość na rozciąganie (R_m), przyjmuje się, że za zniszczenie elementu (rozłupywanie) pod wpływem siły P_{max} odpowiadają dodatnie co wartości naprężenia σ_x .

Stąd wytrzymałość na rozciąganie przy rozłupywaniu obliczana jest jako:

$$f_{cl}^{spl} = \frac{2P_{max}}{\pi D l}$$



11.3. Przegląd hipotez wytrzymałościowych

11.3.2. Hipoteza de Saint Venanta (1832)

Założenie: O wytrzymałości decyduje wartość największego odkształcenia osiowego (ϵ_1).

Złożony stan naprężenia

$$W = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C)$$

$$\epsilon_{max} = \epsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))$$

Jednoosiowe rozciąganie:

$$W = f(\sigma_{zr}, C)$$

$$\epsilon_{max} = \frac{\sigma_{zr}}{E}$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq k_r$$

$$(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

Dopuszczalna wartość naprężeń ściskających w świetle hipotezy de Saint Venanta



$$\sigma_1 = 0$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -\sigma$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{zr} = \nu\sigma \leq k_r$$

...a tymczasem wiadomo, że:

$$|\sigma| \leq k_c$$

$$k_c = \frac{k_r}{\nu}$$

jeżeli: $\nu = 0.1 \div 0.3$

$$k_c = (3 \div 10)k_r$$

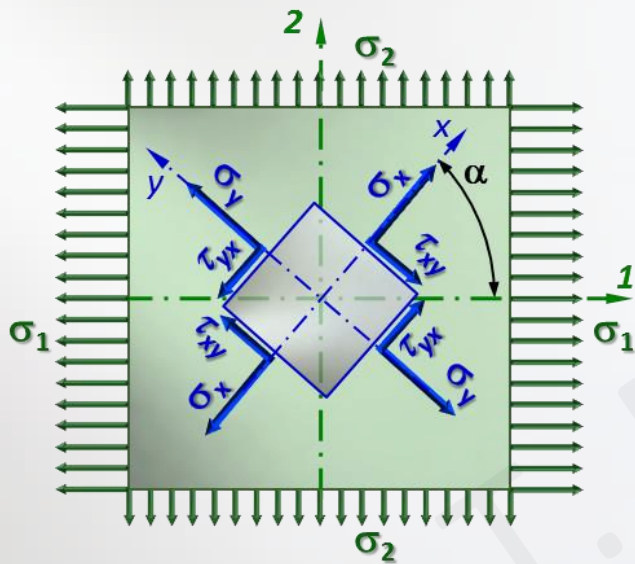
Obecnie hipoteza de Saint Venanta bywa stosowana do materiałów kruchych.

11.3. Przegląd hipotez wytrzymałościowych

11.3.3. Hipoteza Coulomba–Tresca–Guesta (hip. C-T-G, hip. τ_{max})

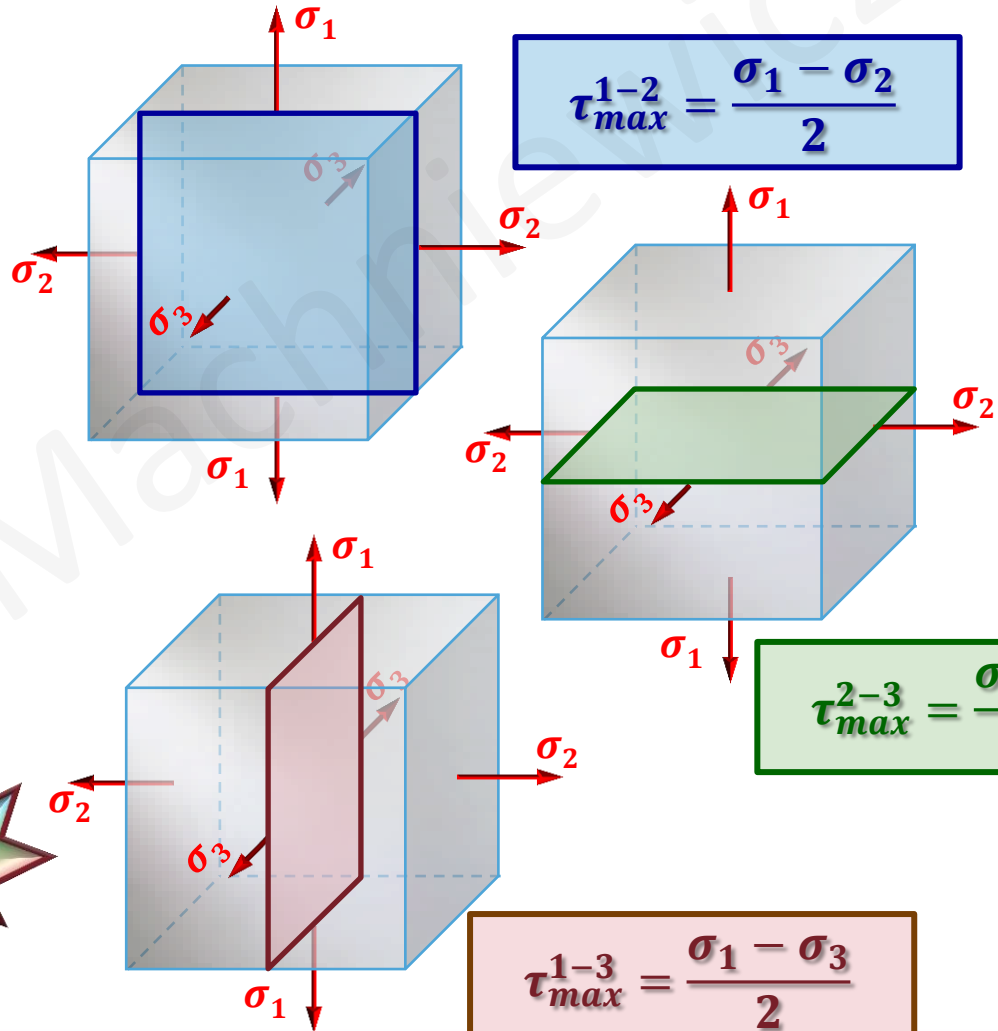
Założenie: O wytrzymałości decyduje wartość maksymalnych naprężeń stycznych (τ_{max}).

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$



$$(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

$$\tau_{max} = \tau_{max}^{1-3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$



11.3. Przegląd hipotez wytrzymałościowych

11.3.3. Hipoteza Coulomba–Tresca–Guesta (hip. C-T-G, hip. τ_{max})

Założenie: O wytrzymałości decyduje wartość **maksymalnych naprężeń stycznych** (τ_{max}).

Złożony stan naprężenia

$$W = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C)$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$



Jednoosiowe rozciąganie:

$$W = f(\sigma_{zr}, C)$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{zr}}{2}$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq k_r$$

$$(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

Doświadczenie potwierdza słuszność hipotezy C-T-G w przypadku materiałów sprężysto-plastycznych, szczególnie poddanych działaniu płaskiego stanu naprężenia (w stanach trójosiowych pominięty zostaje wpływ pośredniego co do wartości naprężenia σ_2).

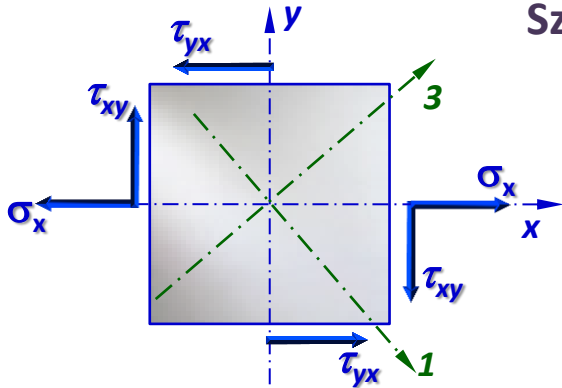
11.3. Przegląd hipotez wytrzymałościowych

11.3.3. Hipoteza Coulomba–Tresca–Guesta (hip. C-T-G, hip. τ_{max})

Założenie: O wytrzymałości decyduje wartość maksymalnych naprężeń stycznych (τ_{max}).

$$\sigma_{zr} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq k_r$$

Szczególny przypadek: działanie naprężeń normalnych i stycznych:



$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= \tau \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{zr} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

Czyste ścinanie: $\sigma_x = \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau:$

$$\sigma_{zr} = 2\tau \leq k_r$$

...a tymczasem wiadomo, że:

$$\tau \leq k_t$$

$$k_t = 0.5 \cdot k_r$$

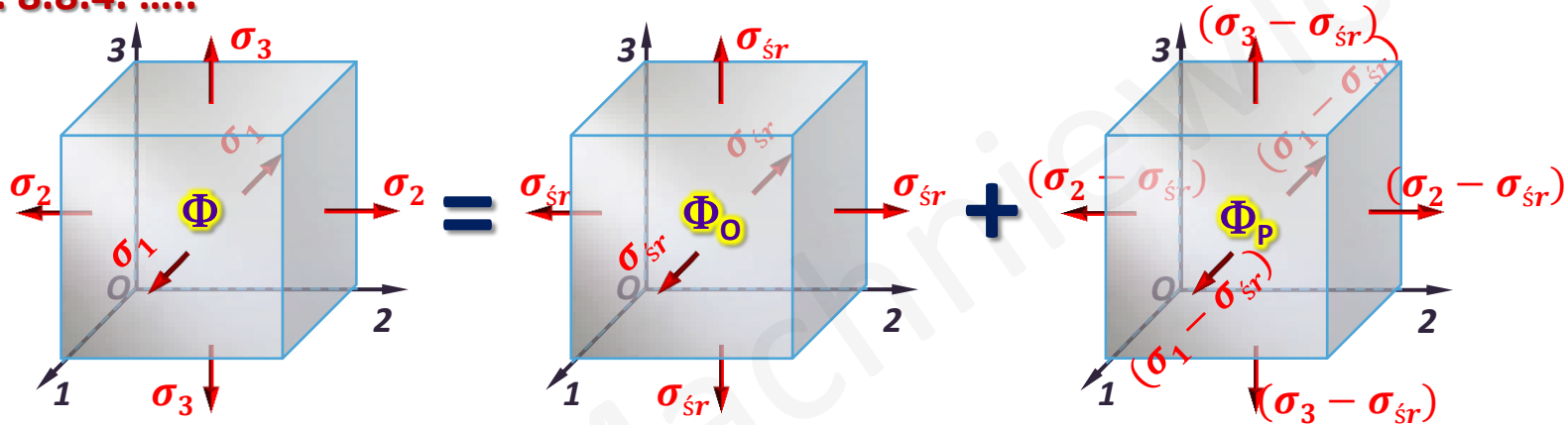
k_t - dopuszczalne naprężenia styczne

11.3. Przegląd hipotez wytrzymałościowych

11.3.4. Hipoteza Hubera–Misesa–Hencky'ego (hip. H-M-H)

Założenie: O wytrzymałości decyduje wartość energii właściwej odkształcenia postaciowego (Φ_p).

Por. p. 8.8.4.



Energia właściwa odkształcenia objętościowego

$$\Phi_o = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$\Phi_o = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

Energia właściwa odkształcenia postaciowego

$$\Phi_p = \Phi - \Phi_o = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$\Phi_p = \Phi - \Phi_o = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]$$

11.3. Przegląd hipotez wytrzymałościowych

11.3.4. Hipoteza Hubera–Misesa–Hencky’ego (hip. H-M-H)

Założenie: O wytrzymałości decyduje wartość energii właściwej odkształcenia postaciowego (Φ_p).

Złożony stan naprężenia

$$W = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C)$$

$$\Phi_p = \frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$$



Jednoosiowe rozciąganie:

$$W = f(\sigma_{zr}, C)$$

$$\Phi_p = \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_{zr}^2$$



Przestrzenny stan naprężenia:

$$\sigma_{zr} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq k_r$$

Płaski stan naprężenia ($\sigma_3=0$):

$$\sigma_{zr} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq k_r$$

Słuszność hipotezy Hubera została potwierdzona dla materiałów sprężysto-plastycznych, w przypadku których znajduje ona obecnie szerokie zastosowanie.

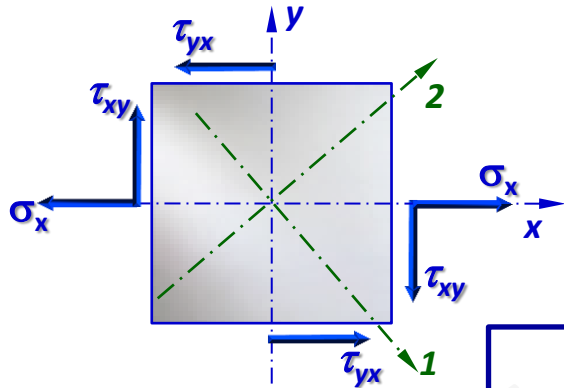
11.3. Przegląd hipotez wytrzymałościowych

11.3.4. Hipoteza Hubera–Misesa–Hencky’ego (hip. H-M-H)

Założenie: O wytrzymałości decyduje wartość energii właściwej odkształcenia postaciowego (Φ_p).

Płaski stan naprężenia ($\sigma_3=0$):

$$\sigma_{zr} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq k_r$$



Działanie naprężeń normalnych i stycznych:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= \tau \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{zr} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$$

$$\sigma_{zr} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Czyste ścinanie: $\sigma_x = \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau:$

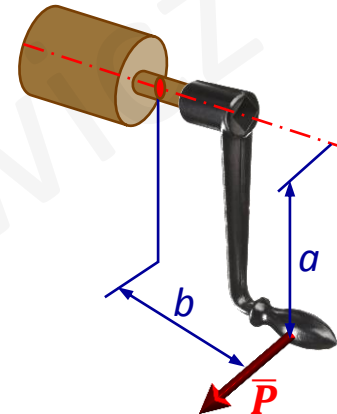
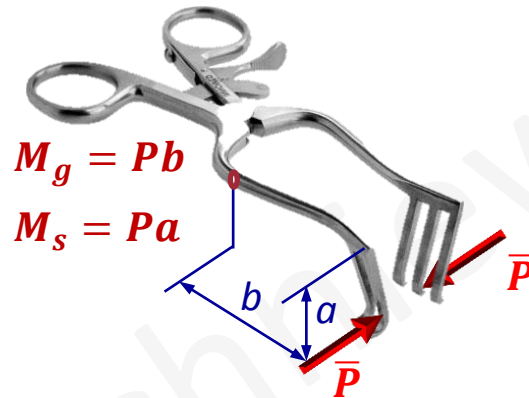
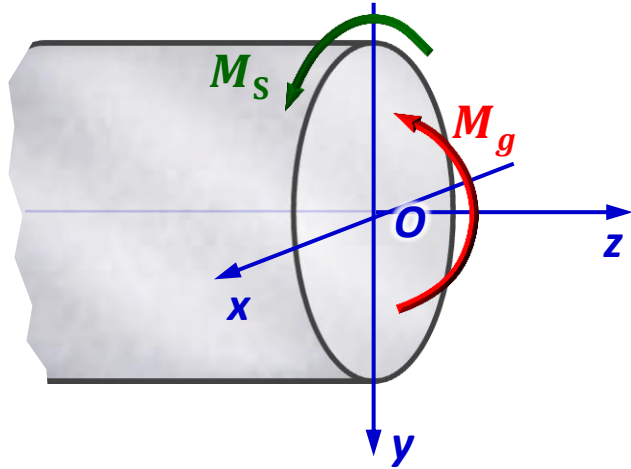
$$\sigma_{zr} = \sqrt{3}\tau \leq k_r$$

...a tymczasem wiadomo, że:

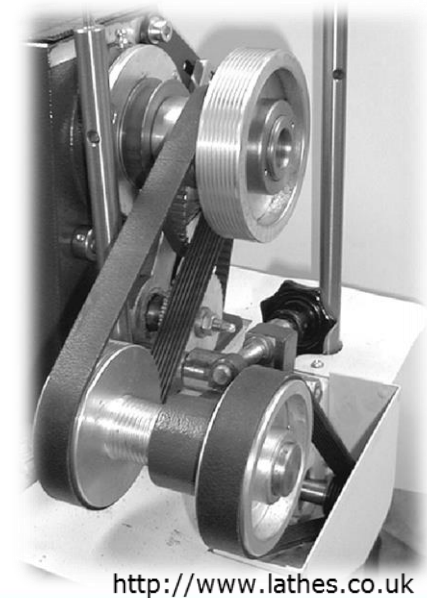
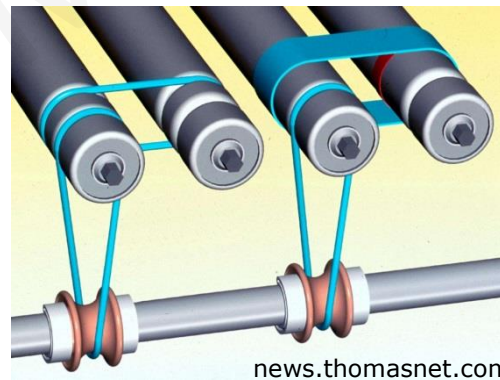
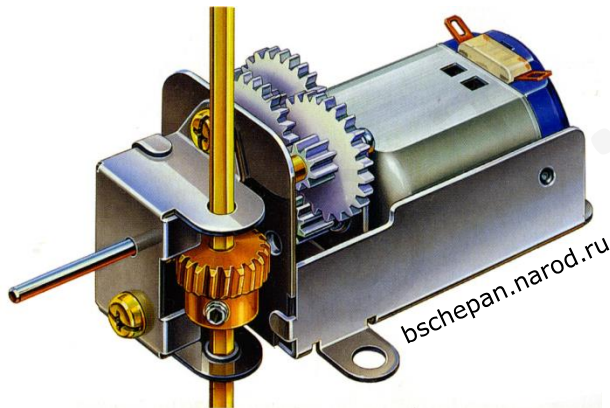
$$\tau \leq k_t$$

$$k_t = \frac{k_r}{\sqrt{3}} \cong 0.59k_r$$

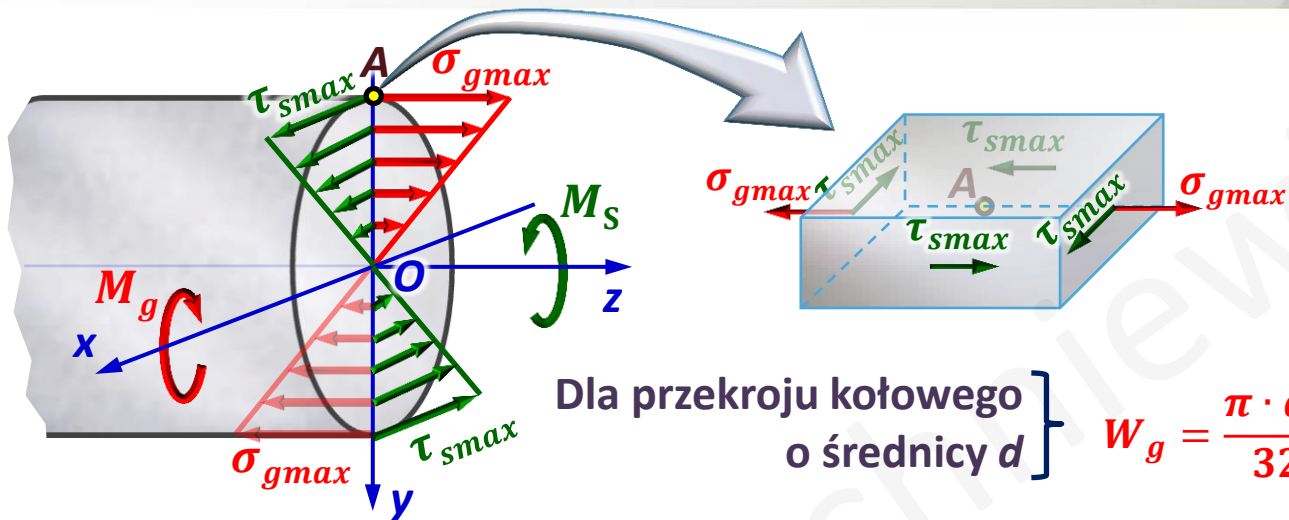
11.4. Zginanie ze skręcaniem – wybrane problemy inżynierskie



Wałki przekładni mechanicznych



11.4. Zginanie ze skręcaniem – moment zredukowany



$$\sigma_{gmax} = \frac{M_g}{W_g} \leq k_g$$

$$\tau_{smax} = \frac{M_s}{W_o} \leq k_s$$

Dla przekroju kołowego o średnicy d } $W_g = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ $W_o = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 2 \cdot W_g$

Zgodnie z hipotezą C-T-G (hip. τ_{max}):

$$\sigma_{zr,A} = \sqrt{\sigma_{gmax}^2 + 4\tau_{smax}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_g}{W_g}\right)^2 + 4\left(\frac{M_s}{2 \cdot W_g}\right)^2} = \frac{1}{W_g} \sqrt{M_g^2 + M_s^2}$$

M_{zr}

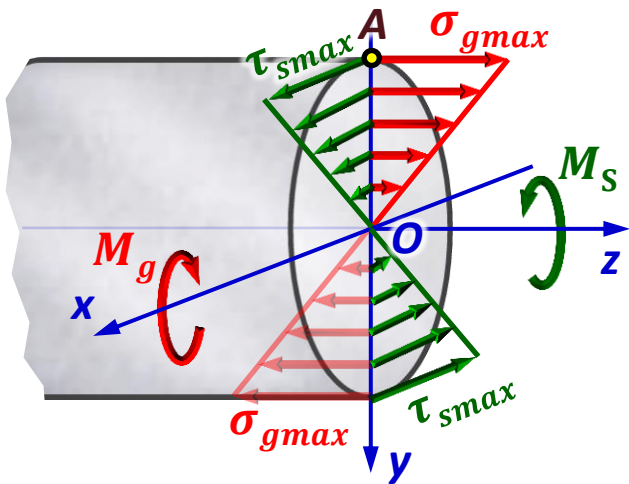
Zgodnie z hipotezą H-M-H:

$$\sigma_{zr,A} = \sqrt{\sigma_{gmax}^2 + 3\tau_{smax}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_g}{W_g}\right)^2 + 3\left(\frac{M_s}{2 \cdot W_g}\right)^2} = \frac{1}{W_g} \sqrt{M_g^2 + \frac{3}{4}M_s^2}$$

M_{zr}

M_{zr} - moment zredukowany

11.5. Zginanie ze skręcaniem – warunek bezpieczeństwa

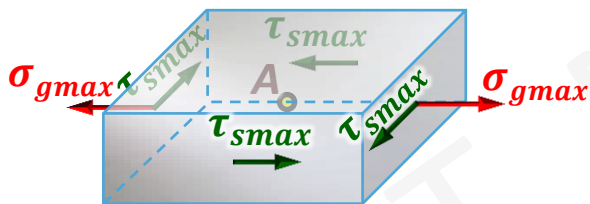


Warunek bezpieczeństwa

$$\sigma_{zr,max} = \frac{M_{zr}}{W_g} \leq k_g$$

k_g - dopuszczalne naprężenia przy zginaniu

W_g - wskaźnik wytrzymałości przekroju na zginanie



$$M_{zr} = \sqrt{M_g^2 + M_s^2}$$

Moment zredukowany wg hipotezy C-T-G

$$M_{zr} = \sqrt{M_g^2 + \frac{3}{4}M_s^2}$$

Moment zredukowany wg hipotezy H-M-H

Dla przekroju kołowego o średnicy d :

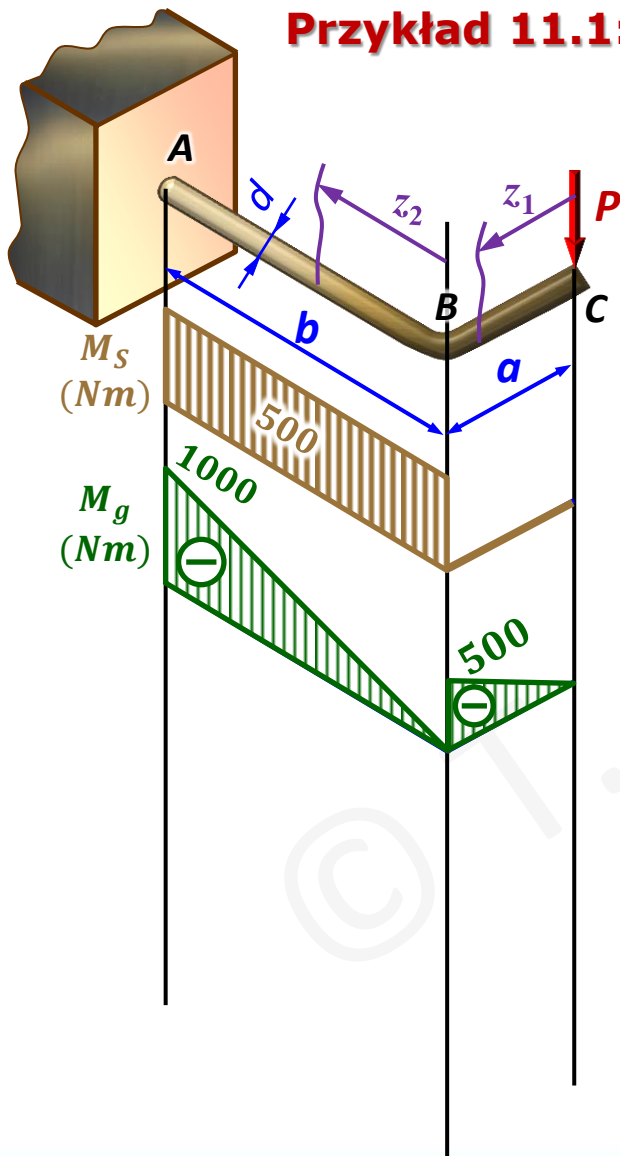
$$\sigma_{zr,max} = \frac{32M_{zr}}{\pi \cdot d^3} \leq k_g$$



$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{zr}}{\pi \cdot k_g}}$$

11.6. Zginanie ze skręcaniem – przykłady obliczeń

Przykład 11.1:



Dla pręta ja na rysunku narysować wykresy momentów: skręcającego (M_s), gnącego (M_g) i zredukowanego (M_{zr}), a następnie obliczyć średnicę pręta (d). Porównać wyniki uzyskane przy użyciu hipotezy Hubera oraz hipotezy Coulomba.

Dane:

$$P = 1 \text{ kN}, k_g = 100 \text{ MPa}, \\ a = 50 \text{ cm}, b = 1 \text{ m},$$

Szukane:

$$M_s, M_g, M_{zr}, d \\ (\text{hip. Hubera oraz Coulomba})$$

Momenty skręcające:

$$M_{S(C-B)} = 0 \quad M_{S(B-A)} = Pa = 500 \text{ Nm}$$

Momenty zginające:

$$M_g(z_1) = -Pz_1 \quad M_g(C) = M_g(z_1=0) = 0$$

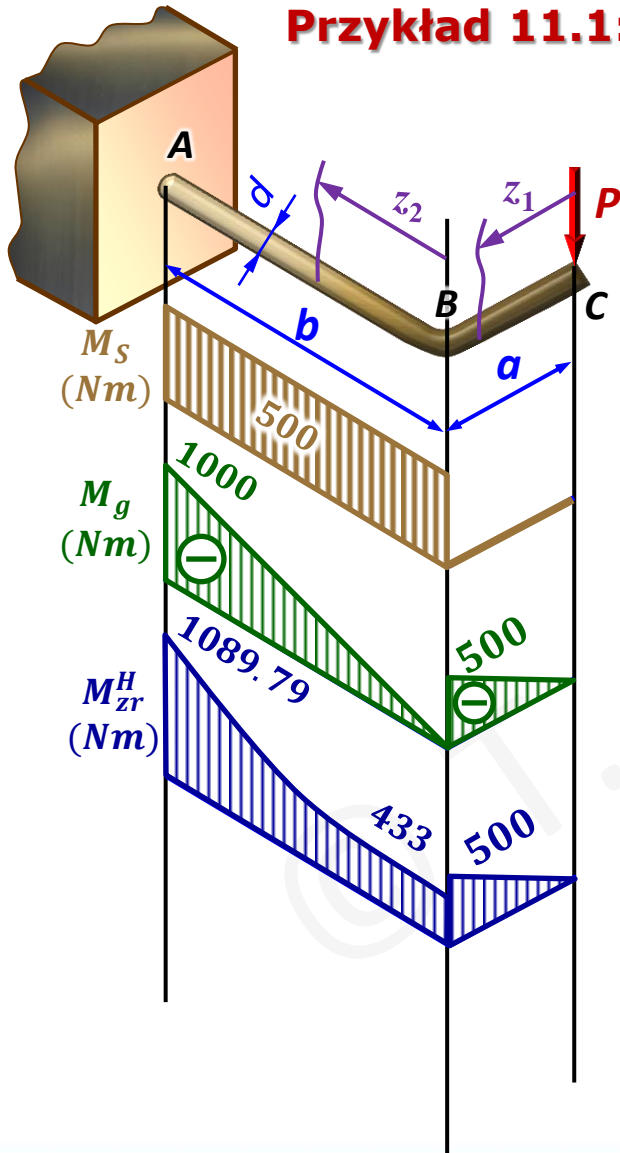
$$M_g(B1) = M_g(z_1=a) = -Pa = 500 \text{ Nm}$$

$$M_g(z_2) = -Pz_2 \quad M_g(B2) = M_g(z_2=0) = 0$$

$$M_g(A) = M_g(z_2=b) = -Pb = 1000 \text{ Nm}$$

11.6. Zginanie ze skręcaniem – przykłady obliczeń

Przykład 11.1:



Dane:

$$P = 1 \text{ kN}, k_g = 100 \text{ MPa}, \\ a = 50 \text{ cm}, b = 1 \text{ m},$$

Szukane:

$$M_s, M_g, M_{zr}, d \\ (\text{hip. Hubera oraz Coulomba})$$

Hipoteza Hubera:

Momenty zredukowane:

$$M_{zr(i)}^H = \sqrt{(M_{g(i)})^2 + 0.75 \cdot (M_{s(i)})^2}$$

$$M_{zr(C)}^H = 0$$

$$M_{zr(B1)}^H = \sqrt{(500)^2 + 0.75 \cdot (0)^2} = 500 \text{ Nm}$$

$$M_{zr(B2)}^H = \sqrt{(0)^2 + 0.75 \cdot (500)^2} = 433 \text{ Nm}$$

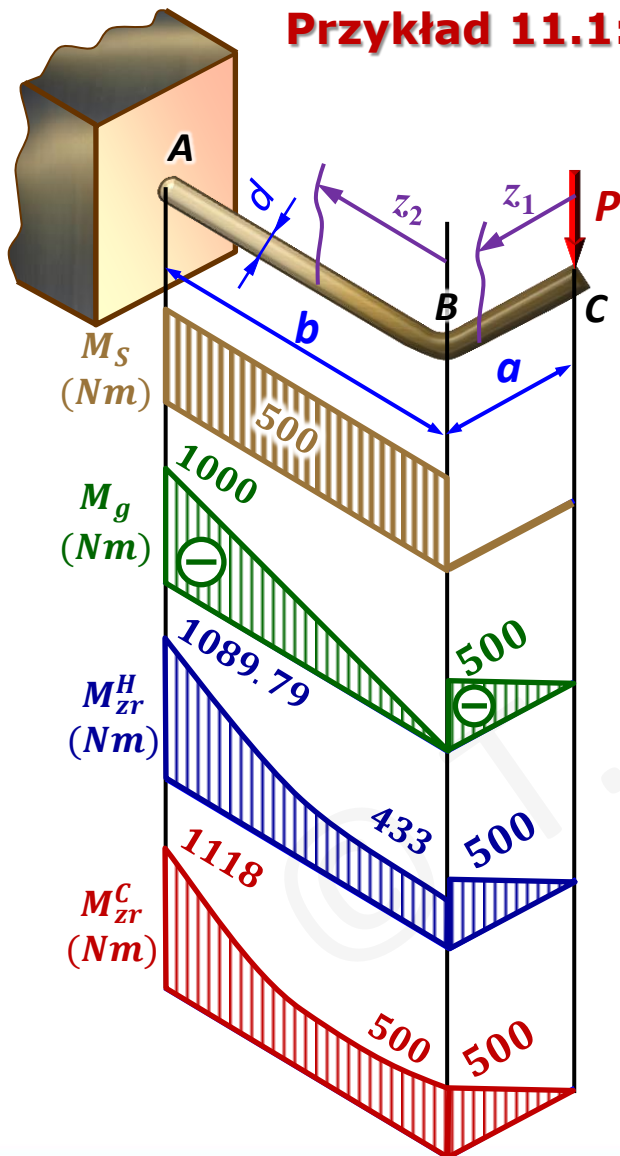
$$M_{zr(A)}^H = \sqrt{(1000)^2 + 0.75 \cdot (500)^2} = 1089.72 \text{ Nm}$$

Średnica:

$$d_H \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{zr,max}^H}{\pi \cdot k_g}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1089.72 \cdot 10^3}{\pi \cdot 100}} = 48.06 \text{ mm}$$

11.6. Zginanie ze skręcaniem – przykłady obliczeń

Przykład 11.1:



Dane:

$P = 1 \text{ kN}$, $k_g = 100 \text{ MPa}$,
 $a = 50 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ m}$,

Szukane:

M_s , M_g , M_{zr} , d
 (hip. Hubera oraz Coulomba)

Hipoteza Coulomba:

Momenty zredukowane:

$$M_{zr(i)}^C = \sqrt{(M_{g(i)})^2 + (M_{s(i)})^2}$$

$$M_{zr(C)}^C = 0$$

$$M_{zr(B1)}^C = \sqrt{(500)^2 + (0)^2} = 500 \text{ Nm}$$

$$M_{zr(B2)}^C = \sqrt{(0)^2 + (500)^2} = 500 \text{ Nm}$$

$$M_{zr(A)}^C = \sqrt{(1000)^2 + (500)^2} = 1118 \text{ Nm}$$

Średnica:

$$d_c \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{zr,max}^C}{\pi \cdot k_g}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1118 \cdot 10^3}{\pi \cdot 100}} = 48.47 \text{ mm}$$